

MAI 1 – příklady pro 10. cvičení

Další užití derivace funkce, Taylorův polynom.

I. Aplikace derivace v bodě - rovnice tečny ke grafu funkce a lineární aproximace funkce:

1. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, když

a) $f(x) = \sin x$ a $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

2. Ukažte, že pro „malá“ x je

a) $\sin x \cong x$; $\operatorname{tg} x \cong x$; $\arcsin x \cong x$; $\operatorname{arctg} x \cong x$;

b) $\sqrt{x+1} \cong 1 + \frac{1}{2}x$; $\sqrt[n]{1+x} \cong 1 + \frac{1}{n}x$, $n \in \mathbb{N}$;

c) $\ln(x+1) \cong x$; $e^x \cong 1+x$;

d) $\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cong -\frac{\pi}{4} - x$; $\ln(1 + \sin(4x)) \cong 4x$.

3. Vypočítejte přibližně užitím lineární aproximace (a porovnejte s hodnotami, které „dává“ kalkulačka):

$$\sqrt[3]{e}; \arcsin(0,2); (1,04)^3; \sqrt{1,06}; \sqrt[10]{1,3}; \ln(1,02).$$

4. Vypočítejte přírůstek objemu, resp. povrchu koule, změníme-li její poloměr R na $R + \Delta R$ a porovnejte je s lineární aproximací přírůstků.

II. Ukažte, že platí nerovnosti (užití monotonie funkce a nalezení extrémů)

1. $e^x \geq 1+x$, $x \in \mathbb{R}$;

2. $\ln x \leq x-1$, $x \in (0, \infty)$;

3. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x \in (0, \infty)$;

4. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$, $x \in (0, \infty)$.

III. Užití Lagrangeovy věty o střední hodnotě funkce:

1. Ukažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí nerovnosti

(i) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(ii) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Zkuste zobecnit.

2. Spočítejte: (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})$; (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

3) Je-li $f'(x) = g'(x)$ ($f'(x) \in \mathbb{R}$, $g'(x) \in \mathbb{R}$) pro $x \in (a, b)$, co lze říci o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a, b) ?

IV. Taylorův polynom.

1. a) Najděte Taylorův polynom stupně n ($n \geq 3$) v bodě $a=0$ pro funkce $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$, $\sqrt{1+x}$;
- b) Najděte Taylorův polynom stupně $n=3$ v bodě $a=0$ pro funkci $\arctg x$;
- c) Najděte Taylorův polynom druhého stupně v bodě $a=0$ pro funkce $f(x) = \ln(1 + \sin 2x)$ a $f(x) = \sqrt{1 + 3e^{-x}}$.

2. Užitím Taylorova polynomu spočítejte limity :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} ;$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) .$$

3. Odhadněte chybu v následujících aproximacích:

- a) $\exp(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ pro $0 \leq x \leq 1$;
- b) $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$.

4. a) S pomocí Taylorova polynomu spočítejte přibližně (a pokuste se odhadnout chybu):

$$\sqrt{0,98} ; \arctg(0,8) \text{ apod.};$$

- b) Je-li $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, spočítejte přibližně $f(1,03)$, $f(1,001)$.